Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare
18 Giugno 2018

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1 (8 punti)**.** Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base standard, ha matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Dire se F è diagonalizzabile.
2) Indicare tutti gli autovettori di F del tipo $(a, 6, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Si calcola il pol. caratteristico $p_F(t) = \det \begin{pmatrix} t-4 & 0 & 0 \\ -1 & t-4 & -1 \\ -4 & 1 & t-2 \end{pmatrix} =$

$= (t-4)(t-3)^2$

Studiamo l'autospazio $V_3 = \mathrm{Ker}(F - 3I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Dunque V_3 ha dim 1, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore 3 è 2. Ciò implica che F NON è diagonalizzabile.

2) In V_3 c'è un solo vettore del tipo $\begin{pmatrix} a \\ 6 \\ b \end{pmatrix}$, ed è $6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Studiamo $V_4 = \mathrm{Ker}(F - 4I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

In V_4 c'è dunque un solo vettore del tipo $\begin{pmatrix} a \\ 6 \\ b \end{pmatrix}$ ed è $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

diagonalizzabile (SI, NO)

$\boxed{\text{NO}}$

autovettori

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}}$

Esercizio 2 (6 punti)**.** Sia $\mathbf{F}$ un campo e consideriamo l'applicazione $T : \mathbf{F}^3 \to \mathbf{F}^3$ che nella base standard è data da:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Sia $\mathbf{F} = \mathbb{R}$: scrivere, se esiste, un vettore non nullo che appartiene a $Ker\ T \cap Imm\ T$ (se non esiste scrivere NON ESISTE).
b) Sia $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_3$: scrivere, se esiste, un vettore non nullo che appartiene a $Ker\ T \cap Imm\ T$ (se non esiste scrivere NON ESISTE).

a) Calcolo Ker T. Tramite mosse di riga

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}$$

dunque T ha rango 3. Allora $Ker T = \{0\}$ e $Ker T \cap Imm T = \{0\}$.

b) La matrice modulo 3 è $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Con mosse di riga ottengo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $Ker T = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Si osserva che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Imm T$.

[Segue dunque che $Ker T \cap Imm T = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

caso $\mathbf{F} = \mathbb{R}$	caso $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_3$
NON ESISTE	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 (8 punti)**.** Consideriamo il sistema di congruenze

$$\begin{cases} ax \equiv 7 \pmod{12} \\ 5^x \equiv a \pmod{21} \end{cases}$$

Trovare le soluzioni del sistema per $a = 17$ e per $a = 47$ rispettivamente. Scrivere "nessuna" se non vi sono soluzioni.

VEDI PROSSIMA PAGINA

Caso $a = 17$	Caso $a = 47$

Compito di Matematica Discreta e Algebra Lineare
18 Giugno 2018
Soluzioni dei problemi di Matematica Discreta

3. Consideriamo il sistema di congruenze

$$\begin{cases} ax \equiv 7 \pmod{12} \\ 5^x \equiv a \pmod{21} \end{cases}$$

Trovare le soluzioni del sistema per $a = 17$ e per $a = 47$ rispettivamente. Scrivere "nessuna" se non vi sono soluzioni.

SOLUZIONE: Caso $a = 17$. Poiché $17 \equiv 5 \equiv -7 \pmod{12}$ e il massimo comune divisore fra 7 e 12 è uguale a 1, si può dividere per 7 (più precisamente, moltiplicare per l'inverso di 7 modulo 12), ottenendo la soluzione $x \equiv -1 \pmod{12}$.

Per analizzare la seconda equazione, bisogna analizzare le potenze di 5 modulo 21 e la loro periodicità. Abbiamo

$$5^1 \equiv 5, \quad 5^2 \equiv 4, \quad 5^3 \equiv 20, \quad 5^4 \equiv 16, \quad 5^5 \equiv 17, \quad 5^6 \equiv 1 \pmod{21}.$$

Ne segue che il periodo delle potenze di 5 è uguale a 6, che $x = 5$ è una soluzione, e che quindi la soluzione generale è $x \equiv 5 \equiv -1 \pmod 6$.

Ora nel sistema

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{12} \\ x \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$$

le due equazioni sono compatibili, ed anzi la prima implica la seconda. Pertanto la soluzione è $x \equiv -1 \pmod{12}$.

Caso $a = 47$. Questo caso si tratta in modo simile al primo. Poiché $47 \equiv 5 \pmod{21}$, la prima equazione di può scrivere nella forma $5x \equiv 7 \equiv -5 \pmod{12}$, ottenendo come soluzione $x \equiv -1$ (mod 1)2.

Usando la tabella delle potenze di 5 modulo 21 descritta sopra, si vede che $x = 1$ è una soluzione della seconda equazione, e quindi la soluzione generale è $x \equiv 1 \pmod 6$.

Infine, il sistema

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{12} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

non è risolubile, in quanto la prima equazione del sistema implica $x \equiv -1 \pmod 6$, che è incompatibile con la seconda equazione. Pertanto il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 4 (8 punti)**.** Fattorizzare il polinomio

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2$$

in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

VEDI PROSSIMA PAGINA

Caso $\mathbb{Q}[x]$	Caso $\mathbb{R}[x]$	Caso $\mathbb{C}[x]$

4. Fattorizzare il polinomio

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2$$

in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

Soluzione: Si vede immediatamente che il polinomio dato è divisibile per $x + 2$. Dividendo, si ha:

$$p(x) = (x + 2)q(x)\,, \qquad \text{dove} \quad q(x) = x^4 + x^2 + 1\,.$$

Per prima cosa consideriamo la fattorizzazione di $q(x)$ in $\mathbb{C}[x]$, che si scriverà necessariamente come prodotto di fattori di primo grado. Osservando che $x^4 + x^2 + 1 = (x^6 - 1)/(x^2 - 1)$, si vede che le sue radici sono le radici seste di 1, con l'eccezione delle radici quadrate di 1, cioè ± 1. Le radici seste di 1 si descrivono graifcamente come i vertici di un esagono regolare con centro l'origine e raggio 1, e sono $\cos(2k\pi/6) + i \sin(2k\pi/6)$ per $k = 0, 1, \dots, 5$. Escludendo ± 1 ed usando le formule note per il seno ed il coseno degli angoli multipli di $\pi/6$, le quattro radici del polinomio si possono descrivere semplicemente come $\pm 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Pertanto la fattorizzazione di $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ è

$$q(x) = (x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\,.$$

In secondo luogo consideriamo la fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$. Visto che nessuma radice di $q(x)$ è reale, no ci sono fattori di grado 1 (Ruffini). Ricordando inoltre che gli elementi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ hanno grado 1 o 2, $q(x)$ deve essere il prodotto di due polinomi di grado 2, che saranno ciascuno il prodotto di due dei fattori di $q(x)$ in $\mathbb{C}[x]$. Ma un polinomio a coefficienti reali, se ha una radice complessa, ha anche la radice complessa coniugata. Quindi c'è un solo modo per accoppiare i fattori di primo grado in $\mathbb{C}[x]$:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = x^2 - x + 1\,, \\ q_2(x) &= (x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = x^2 + x + 1\,. \end{aligned}$$

Dunque la fattorizzazione di $q(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ è $q(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Infine, consideriamo la fattorizzazione di $q(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$. La decomposizione in $\mathbb{R}[x]$, $q(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, è ancora valida, visto che i coefficienti dei fattori sono numeri razionali. Inoltre, i fattori $x^2 - x - 1$ e $x^2 + x + 1$ non sono ulteriormente scomponibili in $\mathbb{Q}[x]$, visto che le loro radici non sono razionali (e neanche reali). Quindi la scomposizione di $q(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ è la stessa della decomposizione in $\mathbb{R}[x]$.